Sebastian Klein

Maß- und Integrationstheorie
2. Übung

15. September 2016

4. Lebesgue-messbare Mengen.

Untersuche die folgenden Teilmengen von $E = [0,1]^2$ auf Lebesgue-Messbarkeit, und bestimme gegebenenfalls ihr Lebesgue-Maß. Hier bezeichnet $\mathbb{Q}$ die Menge der rationalen Zahlen.

(a) $\{\,(x,0)\,|\,x \in [0,1]\,\}$

(b) $\{\,(x,x)\,|\,x \in [0,1]\,\}$

(c) $\{\,(x,y) \in [0,1]^2\,|\,x,y \in \mathbb{Q}\,\}$

(d) $\{\,(x,y) \in [0,1]^2\,|\,x \in \mathbb{Q}$ oder $y \in \mathbb{Q}\,\}$

(e) $\{\,(x,y) \in [0,1]^2\,|\,x,y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\,\}$

5. Das Lebesgue-Maß auf $E = [0,1]^d$ ist translations-invariant.

Es sei $A \subset E = [0,1]^d$ und $x \in \mathbb{R}^d$ derart, dass $x + A \subset E$.

Zeige, dass $x+A$ genau dann Lebesgue-messbar ist, wenn A Lebesgue-messbar ist. Zeige außerdem, dass wenn dies der Fall ist, dann $\lambda(x+A) = \lambda(A)$ gilt.

Bemerkung. Später wird sich zeigen, dass diese Aussage auch ohne die Voraussetzungen $A \subset E$ bzw. $x + A \subset E$ richtig ist.

6. Endliche Verknüpfungen Lebesgue-messbarer Mengen.

Es seien $A, A_1, A_2 \in \mathfrak{A}_E$. Zeige:

(a) $E \setminus A \in \mathfrak{A}_E$
[Tipp. $(E \setminus A)\triangle(E \setminus B_\varepsilon) = A \triangle B_\varepsilon$.]

(b) $A_1 \cup A_2 \in \mathfrak{A}_E$
[Tipp. $(A_1 \cup A_2)\triangle(B_1 \cup B_2) \subset (A_1 \triangle B_1) \cup (A_2 \triangle B_2)$.]

(c) $A_1 \cap A_2 \in \mathfrak{A}_E$
[Tipp. Verwende (a) und (b).]

(d) $A_1 \setminus A_2 \in \mathfrak{A}_E$
[Tipp. Verwende (a) und (c).]

(e) $A_1 \triangle A_2 \in \mathfrak{A}_E$.